Transformation de Laplace

La modélisation d'un système physique fait intervenir un système d'équations différentielles. Sa résolution (plus ou moins difficile) permet la détermination de régimes transitoires du système dynamique. Ces régimes peuvent aussi être déterminés en utilisant le calcul opérationnel fondé sur *la transformation de Laplace*.

Définition de la transformée de Laplace

Soit $f(t)$ une fonction causale[1], alors *la transformée de Laplace* de f est $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$. On dit que $F(p)$ est *l'image de* $f(t)$ *dans le domaine symbolique* et que $f(t)$ est *l'image de* $F(p)$ *dans le domaine temporel*. On appelle *transformation de Laplace* l'application L telle que $L(f)=F$.

Propriétés

On suppose que $F(p)$ et $G(p)$ sont les images de $f(t)$ et $g(t)$, deux fonctions causales.

Unicité

Toute fonction temporelle $f(t)$ possède une image unique $F(p)$; et réciproquement.

Linéarité

- L'image de 0 est 0.
- L'image de $k.f(t)$ est $k.F(p)$.
- L'image de $f(t)+g(t)$ est $F(p)+G(p)$.

Dérivation – Intégration

- L'image de $f'(t)$, *la dérivée de f* est $pF(p)-f(0)$ avec le plus souvent, $f(0)=0$.
- L'image de $\int_0^t f(u)du$, *la primitive de f* est $\frac{1}{p}F(p)$.

Facteur d'échelle

L'image de $f(a.t)$ est $\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Retard et Amortissement

- L'image de $f(t-\tau)$ est $e^{-\tau p}F(p)$.
- L'image de $e^{wt}f(t)$ est $F(p+w)$.

Théorème des valeurs finales et initiales

- $f(0)=\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=\lim\limits_{p\to+\infty} pF(p)$
- $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{p\to 0^+} pF(p)$

Convolution

L'image *du produit de convolution* $f(t)*g(t)$ est $F(p)\times G(p)$.

---

[1] Nulle sur $]-\infty,0[$

Transformées usuelles

Image symbolique	Image temporelle de fonctions causales
$\frac{1}{p}$	Échelon
1	Dirac
$\frac{1}{p^2}$	Rampe
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{w}{p^2+w^2}$	$\sin(wt)$
$\frac{w}{p^2-w^2}$	$\sinh(wt)$
$\frac{w}{(p+a)^2+w^2}$	$e^{-at}\sin(wt)$
$\frac{p}{p^2+w^2}$	$\cos(wt)$
$\frac{p}{p^2-w^2}$	$\cosh(wt)$
$\frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}$	$e^{-at}\cos(wt)$
$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}

La Transformation en Z

Signal causal discret

Une suite numérique $x : n \rightarrow x(n)$ est définie pour tout entier n (positif ou négatif).

Une telle suite est appelée signal causal discret lorsque :

$$x(n) = 0 \text{ pour tout entier n négatif.}$$

Exemple 1

La suite numérique suivante n'est pas un signal causal.

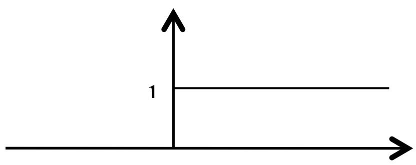
$x(n) = 2n - 1$:

$....x(-2) = -5, x(-1) = -3, x(0) = -1, x(1) = 1,.......$

Exemple 2

Rappelons que la fonction U est l'échelon unité avec la définition suivante:

$$U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$



On fabrique à l'aide de la suite précédente un signal causal discret noté par exemple y :

$$y(n) = x(n) \times U(n)$$

$$y(n) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } n < 0 \\ y(n) = 2n - 1 \end{cases}$$

Exercice

Vérifier que la suite numérique définie par $n \to u_n = y(n)$ est arithmétique, donner sa raison et son terme d'indice 0.

Suite de Dirac

La suite de Dirac est le signal causal discret d défini de la manière suivante:

$$d : n \to d(n)$$
$$d(n) = 0 \text{ si } n \neq 0 \text{ et } d(0) = 1.$$

La suite de Dirac retardée de k (k est un entier positif) est le signal causal discret d_k défini de la manière suivante:

$$d_k : n \to d(n-k)$$
$$d_k(n) = 0 \text{ si } n \neq k \text{ et } d_k(n) = 1 \text{ si } n = k$$

Au lieu de valoir 1 en 0 elle vaut 1 plus tard, en k

Somme de suites de Dirac retardées

On se donne une suite finie de p entiers positifs que l'on peut noter : $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$.

On obtient un nouveau signal causal discret que l'on peut noter $d_{k_1, k_2, \ldots, k_p}$:

$$d_{(k_1, k_2, \ldots, k_p)} : n \to \sum_{i=1}^{p} d_{k_i}(n)$$

Si les k_i sont tous distincts :

$$d_{k_1, k_2, \ldots, k_p}(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } & n = k_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, p \\ 0 \text{ si } & n \neq k_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, p \end{cases}$$

Combinaison linéaire de suite de Dirac retardées

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une suite de p nombres réels on construit un signal discret causal de la manière suivante:

$$\Delta : n \to \sum_{i=1}^{p} x_i \times d_{k_i}(n)$$

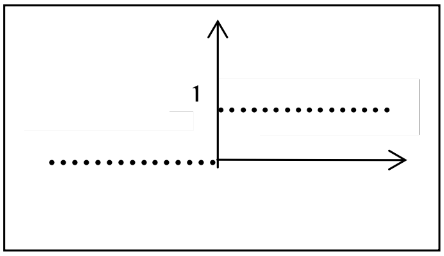
Si les k_i sont tous distincts :

$$\Delta(n) = \begin{cases} x_i \text{ si } n = k_i \text{ pour } i = 1,2,\ldots,p \\ 0 \text{ si } n \neq k_i \text{ pour } i = 1,2,\ldots,p \end{cases}$$

Echelon unité discret

L'échelon unité discret est la suite numérique notée $e : n \to e(n)$ telle que pour tout entier n:

$$e(n) = U(n)$$
$$e(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ 1 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$$



L'échelon unité discret est bien un signal causal discret.

Soit f une fonction numérique elle permet de fabriquer le signal causal discret:

$$f^* : n \to f^*(n) = f(n) \times e(n).$$

Exemple

A partir de la fonction $x \to \sin(\pi x)$ on fabrique le signal causal discret:

$$s : n \to \cos(n\pi) \times e(n)$$
$$s(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ +1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
$$s(n) = (-1)^n e(n)$$

Echelon unité retardé de k (k est un entier positif)

$$e_k : n \to e(n-k)$$
$$e_k(n) = 0 \text{ si } n < k \text{ et } e_k(n) = 1 \text{ si } n \geq k.$$

Il faut attendre k unités pour que l'échelon soit mis à 1.

Rampe unité causale discrète

La rampe unité causale discrète est la suite numérique notée r telle que :

$$r(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ n & \text{si } n \geq 0 \end{cases}.$$

n désigne un entier.

Cette rampe unité causale discrète est aussi définie par :

$$r(n) = n \times e(n).$$

Rampe unité causale discrète retardée de k (k est un entier positif)

$$r_k : n \to r_k = (n-k) \times e(n-k)$$

$$r_k(n) = 0 \text{ si } n < k \text{ et } r_k(n) = n - k \text{ si } n \geq k.$$

Un exemple amusant (N est un entier positif)

$$T_N = \sum_{k=1}^{\infty} r_k$$

$$T_N(0) = 0,$$

$$T_N(1) = r_1(1) = 0.$$

$$\text{Si } n \geq 2 : \; T_N(n) = \sum_{k=1}^{n-1} r_k(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2} = C_n^2$$

$$T_N(2) = r_1(2) = 1$$

$$T_N(3) = r_1(3) + r_2(3) = 2 + 1$$

$$T_N(4) = r_1(4) + r_2(4) + r_3(4) = 3 + 2 + 1$$

Suite retardée

Soit s un signal causal discret, ce signal s'écrit pour l'entier n :

$$s(n) = x(n) \times e(n).$$

Si k est un entier positif on obtient la suite retardée de k à partir de s :

$s_k : n \to x(n-k) \times e(n-k)$

Cette suite est encore un signal causal discret :

si $n < 0$ alors $n-k < 0$ puisque $k > 0$ $x(n-k) \times e(n-k) = 0$

$$s_k : n \to x(n-k) \times e(n-k) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < k \\ x(n-k) \text{ si } n \geq k \end{cases}$$

Suite en avance

Soit s un signal causal discret, ce signal s'écrit pour l'entier n :

$$s(n) = x(n) \times e(n).$$

Si k est un entier positif on obtient la suite avancée de k à partir de s :

$s^k : n \to x(n+k) \times e(n+k)$

Cette suite n'est pas en général un signal causal discret :

si $n < 0$ alors $n+k \geq 0$ si $n \geq -k$ et pour $n = -1, n = -2, \ldots\ldots, n = -k$ il se peut que :
$x(n+k)e(n+k) \neq 0$ sauf si $x(0) = x(1) = x(2) = \ldots\ldots = x(k-1) = 0.$

Exemple

Si e est l'échelon unité discret :

$$e^3(n) = e(n+3) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < -3 \\ 1 \text{ si } n \geq -3 \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots, e^3(-4) = 0, e^3(-3) = 1, e^3(-2) = 1, e^3(-1) = 1, e^3(0) = 1, e^3(1) = 1, \ldots\ldots$$

n	−4	−3	−2	−1	0	1	2
e(n)	0	0	0	0	1	1	1
$e^3(n)$	0	1	1	1	1	1	1

Si $r(n) = n \times e(n)$

$$r^3(n) = (n+3)e(n+3) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < -3 \\ n+3 \text{ si } n \geq -3 \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots, r^3(-4) = 0, r^3(-3) = 0, e^3(-2) = 1, e^3(-1) = 2, e^3(0) = 3, e^3(1) = 4, \ldots\ldots$$

n	−4	−3	−2	−1	0	1	2
r(n)	0	0	0	0	0	1	2
$r^3(n)$	0	0	1	2	3	4	5

Définition de la transformation en Z d'un signal causal discret

Une suite numérique $x : n \to x(n)$ est définie pour tout entier n (positif ou négatif).

Rappelons qu'une telle suite est appelée signal causal discret lorsque :

$$\boxed{x(n) = 0 \text{ pour tout entier n négatif.}}$$

Définition

Au signal causal discret $x : n \to x(n)$ il correspond la fonction $X : z \to X(z)$ où z représente la variable complexe.

La fonction X est définie de la manière suivante :

$$X : z \to X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$$

La fonction $z \to X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$ s'appelle la transformée en Z du signal $x : n \to x(n)$.

La transformée en Z n'est définie que si la suite x est causale $x(n) = 0$ si $n < 0$.

Autre notation

$$X : z \to X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \times x^{-n}$$

Exemples

1) La suite de Dirac d est le signal causal discret d défini de la manière suivante:

$d : n \to d(n)$ avec les valeurs suivantes : $d(n) = 0$ si $n \neq 0$ et $d(0) = 1$.

$D(z) = d(0)\frac{1}{z^0} = 1$. La fonction D est constante et vaut 1.

2) L'échelon unité discret e : $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$.

3) La rampe unité discrète r : $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \times \frac{1}{z^n}$.

Explication concernant la définition de la Transformée en Z

Question

Pour quelles valeurs de z la fonction $X : z \to X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\times\left(\frac{1}{z^n}\right)$ **est-elle définie ?**

Réponse

Lorsque la limite suivante existe $\mathrm{Lim}_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x(n)\times\left(\frac{1}{z^n}\right)$.

Illustration à l'aide d'un exemple

Soit q un nombre complexe ou réel, on connaît l'égalité de Fermat :

$$\left(1+q+q^2+q^3+........+q^N\right)\times(1-q)=1-q^{N+1}$$

En effet, on s'en rend compte rapidement ainsi :

$$\left(1+q+q^2+q^3+........+q^N\right)\times(1-q)$$

$$1+q+q^2+q^3+........+q^N-\left(q+q^2+q^3+q^4........+q^{N+1}\right)=1-q^{N+1}.$$

Un raisonnement rigoureux s'effectue par récurrence : la formule est vraie pour N=1 :

$(1+q)\times(1-q)=1-q^2$**.Si la formule est vraie pour N, elle est encore vraie pour N+1, cela se vérifie facilement, donc la formule est vraie pour tout entier positif N non nul.**

$$\text{Si } q\neq 1 : 1+q+q^2+q^3+........+q^N=\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

$$\text{Si } |q|<1 : \lim_{n\to\infty} q^{N+1}=0 \text{ donc } \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{N+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}$$

$$\text{Si } |q|<1 : \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} q^n \text{ existe et } \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} q^n=\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$$

$$\text{Soit } q = \frac{1}{z} : \text{si } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \ \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{z}\right)^n \text{ existe et } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Si $e(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ 1 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$ alors la fonction $z \to E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(n) \times \frac{1}{z^n}$ est définie pour $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

c'est à dire pour $|z| > 1$ et $E(z) = \dfrac{z}{z-1}$ si $|z| > 1$.

La transformée en Z du signal $e : n \to e(n)$ est définie pour $z > 1$ par $E(z) = \dfrac{z}{1-z}$.

Exercice de prise en main

Pour chacun des signaux discrets x suivants écrire explicitement :

A) $\sum_{n=0}^{\infty} x(n) \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$

B) $x(0) + x(1)\frac{1}{z} + x(2)\frac{1}{z^2} + x(3)\frac{1}{z^3} + x(4)\frac{1}{z^4} + \ldots$

1) e est l'échelon unité, x (n)=e (n−2)

2) r est la rampe unité discrète

3) $x(n) = \begin{cases} n - 2 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$

4) $x(n) = (n - 2)e(n - 2)$

$= \begin{cases} n - 2 \text{ si } n - 2 \geq 0 \\ 0 \text{ si } n - 2 < 0 \end{cases}$

5) $2^n e(n)$

6) $2^{n-1} e(n - 1)$

7) $x(n) = \begin{cases} 2^{n-1} \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$

8) $x(n) = \begin{cases} 2^{n+2} \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$

9) $x(n) = 2^{n+2} e(n + 2)$

Question

Ce signal est-il causal ?

10) $s(n) = 2^n e(n)$

$x(n) = s(n+3)$

Question

Ce signal est-il causal ?

10) $s(n) = 2^n e(n)$ si $n \ge 3$

$s(0) = s(1) = 0$

$x(n) = s(n+2)$

Question Ce signal est-il causal ?

Solution de l'exercice de prise en main

Signal x	$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$	$x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \frac{x(3)}{z^3} + \frac{x(4)}{z^4} + \dots$
1) x=e	$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$	$E(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \dots$
1) x (n)=e (n–2)	$0 + \frac{0}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ Remarque $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^{n-2}}$ $= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^2} E(z)$	$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$ $= \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \dots\right)$ $= \frac{1}{z^2} E(z)$
r	$\sum_{n=0}^{\infty} n \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$	$\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \dots$
$x(n) = \begin{cases} n-2 : n \ge 0 \\ 0 : n < 0 \end{cases}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (n-2) \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$	$-2 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4} + \dots$

$x(n) = (n-2)e(n-2)$ $= \begin{cases} n-2 \text{ si } n-2 \geq 0 \\ 0 \text{ si } n-2 < 0 \end{cases}$	$\sum_{n=2}^{\infty} (n-2) \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$ **Remarque** $\sum_{n=2}^{\infty} (n-2) \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$ $= \frac{1}{z^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-2) \left(\frac{1}{z^{n-2}}\right)$ $= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} n \times \left(\frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{z^2} R(z)$	$\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4} + \dots$ $= \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \dots\right)$
$2^n e(n)$	$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$	$1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \dots$
$2^{n-1} e(n-1)$	$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$ $= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \times \left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$ $= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$	$\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \frac{16}{z^5} + \dots$ $= \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{16}{z^4} + ..\right)$
7) $x(n) = \begin{cases} 2^{n-1} \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$	$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \dots.$
8) $x(n) = \begin{cases} 2^{n+2} \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$	$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+2} \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$	$4 + \frac{8}{z} + \frac{16}{z^2} + \frac{32}{z^3} + \frac{64}{z^4} + \dots$
9) $x(n) = 2^{n+2} e(n+2)$ **Question** **Ce signal est-il causal ?** **Non, ce signal n'est pas causal car x (–2), x (–1) sont des réels non nuls:** $\boxed{\begin{array}{l} x(-2) = 2^0 = 1, \\ x(-1) = 2^1 = 2. \end{array}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+2} \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$	$4 + \frac{8}{z} + \frac{16}{z^2} + \frac{32}{z^3} + \frac{64}{z^4} + \dots$
10) $s(n) = 2^n e(n)$ $x(n) = s(n+3)$ **Question** **Ce signal est-il causal ?**	$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+3} \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$	$2 \times \left(4 + \frac{8}{z} + \frac{16}{z^2} + \frac{32}{z^3} + \frac{64}{z^4} + ..\right).$

Non, ce signal n'est pas causal car x (–3), x (–2), x (–1) sont des réels non nuls.		
10) $s(n) = 2^n e(n)$ si $n \geq 3$ $s(0) = s(1)) = 0$ $x(n) = s(n+2)$ Question Ce signal est-il causal ? Oui, compte tenu des conditions initiales : s (0)=0, s (1)=0, s (2)=0 qui impliquent: x (–2)=s (0)=0, x (–1)=s (1)=0	$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+2} \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$	$4 + \frac{8}{z} + \frac{16}{z^2} + \frac{32}{z^3} + \frac{64}{z^4} + \dots$ Début

Transformée en Z de la suite de Dirac

La suite de Dirac est le signal causal discret d défini de la manière suivante:

$$d : n \to d(n)\,;\; d(n) = 0 \text{ si } n \neq 0 \text{ et } d(0) = 1.$$

Sa transformée en Z est :

$$D : z \to D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d(n) \times \frac{1}{z^n} = d(0) \times \frac{1}{z^0}.$$

Donc la transformée en Z de la suite de Dirac est la fonction constante :

$$D : z \to 1.$$

La Transformation en Z associe à la suite de Dirac est la fonction constante 1.

Transformée en Z de l'échelon unité discret

L'échelon unité discret est la suite numérique notée e telle que pour tout entier n:

$$e(n) = U(n)$$

$$e(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ 1 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$$

Sa transformée en Z est la fonction de la variable complexe z définie par:

$$E : z \rightarrow E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

Expression fonctionnelle de E

Si $|z| > 1$ alors $E(z)$ existe et : $\boxed{E(z) = \dfrac{z}{z-1}}$

Explications

Formule de Fermat

$$\boxed{\left(1 + Z + Z^2 + \dots\dots\dots + Z^N\right) \times (1 - Z) = 1 - Z^{N+1}}$$

On vérifie cette formule en développant:

$$\left(1 + Z + Z^2 + \dots\dots\dots + Z^N\right) \times (1 - Z) =$$

$$1 + Z + Z^2 + \dots\dots\dots + Z^N - Z - Z^2 - \dots\dots\dots - Z^N - Z^{N+1} = 1 - Z^{N+1}$$

Remarque

Pour être précis on démontre cette formule par récurrence.

Application de la Formule de Fermat

Si $Z \neq 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=N} Z^n = \frac{1 - Z^{N+1}}{1 - Z}$

$$\text{Si } |Z| < 1 : \ \mathrm{Lim}_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{n=N} Z^n = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} \frac{1 - Z^{N+1}}{1 - Z} = \frac{1}{1 - Z}$$

$$\mathrm{Lim}_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{n=N} Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n \qquad \text{Si } |Z| < 1 : \quad \sum_{n=0}^{\infty} Z^n = \frac{1}{1 - Z}.$$

$$\text{Si } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1 : \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{z-1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Transformée en Z de la rampe unité causale discrète

La rampe unité causale discrète est la suite numérique notée r telle que :

$$r(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ n \text{ si } n \geq 0 \end{cases} .$$

n désigne un entier.

Cette rampe unité causale discrète est aussi définie par:

$$r(n) = n \times e(n).$$

Sa transformée en Z est la fonction de la variable complexe z définie par:

$$R : z \to R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \times \frac{1}{z^n}$$

Expression fonctionnelle de R

$\text{Si } |z| > 1 \text{ alors } R(z) \text{ existe et :}$ $\boxed{R(z) = \frac{z}{(z-1)^2}}$

Explications

$$E : z \to E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

$\text{Si } |z| > 1 \text{ alors } E(z) \text{ existe et :}$ $E(z) = \frac{z}{z-1}$

Dérivons la fonction :

$$E'(z) = \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = -\frac{1}{(z-1)^2}$$

On utilise un théorème non démontré ici qui affirme :

$$\text{pour } |z| > 1 : E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \text{ existe et sa dérivée est} : E'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} -n \times \frac{1}{z^{n+1}}$$

$$E'(z) = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} n \times \frac{1}{z^n} = -\frac{1}{(z-1)^2}.$$

Il en résulte que :

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \times \frac{1}{z^n} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Transformée en Z du signal géométrique

$$g_b : n \to b^n \times e(n)$$

$$g_b(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ b^n & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

Il est évident que le réel b est choisi non nul.

Sa transformée en Z est la fonction de la variable complexe z définie par:

$$G : z \to G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \times \frac{1}{z^n}$$

Expression fonctionnelle de G

Si $|z| > |b|$ alors $G(z)$ existe et : $\boxed{G(z) = \frac{z}{z-b}}$

Explications

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \times \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{b}{z}} = \frac{1}{\frac{z - b}{z}} = \frac{z}{z - b}$$

La transformation en Z est linéaire

Si x et y sont deux signaux causaux discrets alors pour tout couple de réels a et b le signal w=ax+by est encore causal discret, avec la définition suivante :

$$w : n \to w(n) = ax(n) + by(n)$$

W, X, Y représentent les Transformées en Z respectives des signaux w, x, y.

$$W : z \to W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n) \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$$

$$X : z \to X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \times \left(\frac{1}{z^n}\right) \qquad Y : z \to Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$$

La linéarité de la transformée en Z s'exprime par :

$$W = aX + bY : z \to W(z) = aX(z) + bY(z).$$

Explications

$$\begin{aligned} W : z \to W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n) \times \left(\frac{1}{z^n}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(ax(n) + by(n)\big) \times \left(\frac{1}{z^n}\right) \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \times \left(\frac{1}{z^n}\right) + b \sum_{n=0}^{\infty} y(n) \times \left(\frac{1}{z^n}\right) \\ &= aX(z) + bY(z). \end{aligned}$$

Exercice 1

Exercice 1

Donner les expressions des transformées en Z des « polynômes » :

$$s(n) = \left(an^2 + bn + c\right)e(n), v(n) = bn + c$$

Solution

$$S(z) = a\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + b\frac{z}{(z-1)^2} + c\frac{z}{z-1}$$

$$S(z) = \frac{az(z+1) + bz(z-1) + cz(z-1)^2}{(z-1)^3}$$

$$S(z) = \frac{cz^3 + (a+b-2c)z^2 + (a-b+c)z}{(z-1)^3}$$

$$V(z) = \frac{bz(z-1) + cz(z-1)^2}{(z-1)^3} = \frac{bz + cz(z-1)}{(z-1)^2} = \frac{cz^2 + (b-c)z}{(z-1)^2}$$

La multiplication par le signal géométrique

Le signal causal discret défini par

$$g_b : n \to b^n \times e(n) \quad : g_b(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ b^n & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

peut se nommer signal géométrique causal discret.

Si x est un signal causal discret quelconque sa transformée en Z est la fonction X de la variable complexe z:

$$X : z \to X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \times \left(\frac{1}{z^n}\right)$$

On obtient un nouveau signal causal discret:

$$\boxed{y : n \to b^n \times x(n) \times e(n).}$$

Sa transformée en Z est la fonction de la variable complexe z définie par:

$$Y : z \to Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \times x(n) \times \frac{1}{z^n}.$$

Expression fonctionnelle de Y à partir de X

Si $|z| > |b|$ alors $Y(z)$ existe et : $\boxed{Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)}$

Explications

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \times x(n) \times \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \times \left(\frac{b}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \times \frac{1}{\left(\frac{z}{b}\right)^n} = X\left(\frac{z}{b}\right).$$

Remarque

La transformée en Z de l'échelon unité e est

$$E : z \to E(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Donc la transformée en Z du signal

$$n \to b^n \times e(n)$$

est

$$z \to E\left(\frac{z}{b}\right) = \frac{\frac{z}{b}}{1-\frac{z}{b}} = \frac{\frac{z}{b}}{\frac{b-z}{b}} = \frac{z}{b-z}$$

Exercice 2

Exercice 2

Partie A

Donner les transformées en Z, notées respectivement X, Y et V des signaux suivants:

$1)\ x : n \rightarrow 2^n \times e(n) \quad 2)\ y : n \rightarrow 2^n \times n \times e(n) \quad 3)\ v : n \rightarrow 2^n \times n^2 \times e(n)$

Partie B

A l'aide du résultat de [l'exercice 1](#) **donner la transformée en Z du signal**

$$s : n \rightarrow \left(n^2 + n + 1\right) \times e(n)$$

En déduire la transformée en Z, W, du signal

$$w : n \rightarrow 2^n\left(n^2 + n + 1\right) \times e(n)$$

Vérifier les calculs avec les résultats de la Partie A

Solution

Partie A

$$1)\ X(z) = \frac{z}{z-2} \qquad 2)\ Y(z) = \frac{\frac{z}{2}}{\left(\frac{z}{2} - 1\right)^2} = 2 \times \frac{z}{(z-2)^2}$$

$$3)\ V(z) = \frac{\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2} + 1\right)}{\left(\frac{z}{2} - 1\right)^3} = 2 \times \frac{z(z+2)}{(z-2)^3}$$

Partie B

A l'aide de l'exercice 1 on exprime la transformée en Z du signal

$$s : n \rightarrow s(n) = \left(an^2 + bn + c\right)e(n)$$

$$S(z) = \frac{cz^3 + (a + b - 2c)z^2 + (a - b + c)z}{(z-1)^3}$$

$$a = b = c = 1 : S(z) = \frac{z^3 + z}{(z-1)^3} \qquad W(z) = S\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \frac{z}{2}}{\left(\frac{z}{2} - 1\right)^3} = \frac{z^3 + 4z}{(z-2)^3}$$

$$\frac{z}{z-2} + 2 \times \frac{z}{(z-2)^2} + 2 \times \frac{z(z+2)}{(z-2)^3} = \frac{z^3 + 4z}{(z-2)^3}$$

La Transformation en Z de la suite retardée

$$s(n) = x(n)\times e(n).$$

Appelons S sa transformée en Z:

$$S : z \rightarrow S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\times e(n)\times\left(\frac{1}{z^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\times\left(\frac{1}{z^n}\right)$$

Si k est un entier positif on obtient la suite retardée de k à partir de s :

$$s_k : n \rightarrow x(n-k)\times e(n-k)$$

Cette suite est encore un signal causal discret :

si $n < 0$ alors $n - k < 0$ puisque $k > 0$ $x(n-k)\times e(n-k) = 0$

Sa transformée en Z est la fonction de la variable complexe z définie par:

$$S_k : z \rightarrow S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k)\times e(n-k)\times\frac{1}{z^n}.$$

Expression fonctionnelle de S_k à partir de S

$$\boxed{S_k(z) = \frac{1}{z^k}\times S(z)}$$

Explications

$S_k : z \rightarrow S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k)\times e(n-k)\times\frac{1}{z^n}$.Puisque $x(n-k)e(n-k) = 0$ si $n < 0$:

$$S_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} x(n-k)\frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^k}\sum_{n=k}^{\infty} x(n-k)\frac{1}{z^{n-k}}$$

$S_k(z) = \frac{1}{z^k}\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\frac{1}{z^n}$; $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\frac{1}{z^n}$ donc : $S_k(z) = \frac{1}{z^k}\times S(z).$

Exemple:la Transformée en Z de la suite de Dirac retardée de k (k est un entier positif)

$d_k : n \rightarrow d(n-k)$

$d_k(n) = 0$ si $n \neq k$ et $d_k(n) = 1$ si $n = k$: $D(z) = 1$; $D_k(z) = \frac{1}{z^k}\times D(z) = \frac{1}{z^k}$

On pouvait s'y attendre car:

$d_k(n) = 0$ si $n \neq k$ et $d_k(n) = 1$ si $n = k$ $D_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_k(n) \times \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^k}$.

La Transformée en Z l'échelon unité retardée de 1 : $z \to \frac{1}{z-1}$

La Transformée en Z l'échelon unité retardée de k (k est un entier positif)

$z \to \frac{1}{z^{k-1}} \times \frac{1}{z-1}$

Exercice 3

Partie A

Donner les transformées en Z, notées respectivement A, B et C des signaux suivants:

1) $a : n \to 2^{n-3} \times e(n-3)$

2) $b : n \to 2^{n-3} \times (n-3) \times e(n-3)$

3) $c : n \to 2^{n-3} \times (n-3)^2 \times e(n-3)$

Partie B

A l'aide du résultat de [l'exercice 2](#) **donner la transformée en Z du signal**

$h : n \to 2^{n-3}\left((n-3)^2 + n - 2\right) \times e(n-3)$

(En remarquant que n–3+1=n–2).

Solution

Partie A

$x : n \to 2^n \times e(n)$

$y : n \to 2^n \times n \times e(n)$

$v : n \to 2^n \times n^2 \times e(n)$

1) $X(z) = \frac{z}{z-2}$ $A(z) = \frac{1}{z^3} \times \frac{z}{z-2} = \frac{1}{z^2} \times \frac{1}{z-2}$ $A(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$

2) $Y(z) = \frac{\frac{z}{2}}{\left(\frac{z}{2}-1\right)^2} = 2 \times \frac{z}{(z-2)^2}$ $B(z) = \frac{2}{z^2} \times \frac{1}{(z-2)^2}$ $B(z) = \frac{2}{(z(z-2))^2}$

3) $V(z) = \frac{\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)}{\left(\frac{z}{2}-1\right)^3} = 2 \times \frac{z(z+2)}{(z-2)^3}$ $C(z) = \frac{2}{z^2} \times \frac{(z+2)}{(z-2)^3}$

Partie B

$w : n \to 2^n\left(n^2 + n + 1\right) \times e(n)$ $h(n) = 2^{n-3}\left((n-3)^2 + n + 1 - 3\right) \times e(n-3)$

$$W(z) = S\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \frac{z}{2}}{\left(\frac{z}{2}-1\right)^3} = \frac{z^3 + 4z}{(z-2)^3}$$

$$H(z) = \frac{1}{z^3} \times \frac{z^3 + 4z}{(z-2)^3}$$

La Transformation en Z de la suite en avance

Soit s un signal causal discret, ce signal s'écrit pour l'entier n :

$$n \to x(n) \times e(n).$$

Si k est un entier positif on obtient la suite avancée de k à partir de s :

$s : n \to x(n+k) \times e(n+k)$

Cette suite n'est pas en général un signal causal discret :

si $n < 0$ alors $n + k \geq 0$ si $n \geq -k$ et pour $n = -1, n = -2, \ldots\ldots, n = -k$ il se peut que :
$x(n+k)e(n+k) \neq 0$ sauf si $x(0) = x(1) = x(2) = \ldots\ldots = x(k-1) = 0$.

Si $x(0) = x(1) = x(2) = \ldots\ldots = x(k-1) = 0$ la Transformée en Z du signal

$s : n \to x(n+k)e(n+k)$

est la fonction:

$S : z \to S(z) = z^{k}X(z)$

X étant la Transformée en Z du signal:

$$n \to x(n) \times e(n).$$

X est la Transformée en Z du signal $s : n \to x(n)e(n)$
S_k est la Transformée en Z du signal : $n \to x(n+k)e(n+k)$
$$S_k(z) = z^{k} \times X(z) - z^{k} \times x(0) - z^{k-1} \times x(1) - \ldots\ldots - z^{k-1} \times x(k-2) - z \times x(k-1)$$

Explications

$$S_k : z \to S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k) \times e(n+k) \times \frac{1}{z^n}.$$

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k)\frac{1}{z^n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k)\frac{1}{z^{n+k}} = z^k \sum_{n=k}^{\infty} x(n)\frac{1}{z^n}$$

$$\text{Comme} : X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\frac{1}{z^n} = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \ldots\ldots \frac{x(k-1)}{z^{k-1}} + \sum_{n=k}^{\infty} x(n)\frac{1}{z^n} :$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} x(n)\frac{1}{z^n} = X(z) - x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \ldots\ldots \frac{x(k-1)}{z^{k-1}}$$

$$S_k(z) = z^k \sum_{n=k}^{\infty} x(n)\frac{1}{z^n} = z^k \times \left(X(z) - \left(x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \ldots\ldots \frac{x(k-1)}{z^{k-1}} \right) \right)$$

$$S_k(z) = z^k \times X(z) - z^k \times x(0) - z^{k-1} \times x(1) - \ldots\ldots\ldots - z^{k-1} \times x(k-2) - z \times x(k-1)$$

Exemple de transformation d'une suite en avance

$r : n \to r(n) = ne(n)$ vérifie : $r(0) = 0$.

La Transformée en Z de la rampe r est :

$$R : z \to \frac{z}{z-1}$$

Appelons s la rampe en avance de 1:

$s : n \to (n+1)e(n+1)$ est causal discret.

Appelons S la Transformée en Z du signal causal s:

$$S(z) = z \times E(z)$$

$$S(z) = \frac{z^2}{z-1}$$

Exercice 4

Exercice 4

Ecrire les transformées en Z des signaux causaux suivants:

$1)\lambda : n \to (n+1)^2 e(n+1)$

$2)\mu : n \to (n+1)n e(n+1)$

On commencera par transformer le signal:

$n \to n(n-1)e(n) = \left(n^2 - n\right)e(n)$

$3)\ p : n \to 2^{n+1} \times (n+1) \times e(n+1)$

$4)\ q : n \to 2^{n+1} \times (n+1)^2 \times e(n+1)$

Réponses

Signal	Transformée en Z
$1)\lambda : n \to (n+1)^2 \times e(n+1)$	$z \to \dfrac{z^2(z+1)}{(z-1)^3}$
$2)\mu : n \to (n+1) \times n \times e(n+1)$	$z \to \dfrac{z^2(z+1)}{(z-1)^3} - \dfrac{z^2}{(z-1)^2}$
$3)\ p : n \to 2^{n+1} \times (n+1) \times e(n+1)$	$2 \times \dfrac{z^2}{(z-2)^2}$
$4)\ q : n \to 2^{n+1} \times (n+1)^2 \times e(n+1)$	$2 \times \dfrac{z^2(z+2)}{(z-2)^3}$

La transformée en Z inverse

Comme pour la Transformation de Laplace on se pose la question suivante:

$$X : z \to X(z)$$

est une fonction de la variable complexe z; existe-il un signal causal discret

$$x : n \to x(n)$$

tel que la fonction X soit sa Transformée en Z?

Si un tel signal x existe il sera appelé original de X. Cet original est unique.

Utilisation

On sera amené à trouver l'original d'une fonction $X : z \to X(z)$ lorsque l'on voudra exprimer un signal causal discret qui vérifie une équation.

Exemple

On veut trouver le signal causal discret (ou tout simplement la suite numérique définie pour tout entier positif) s qui vérifie

$$s(n+2) + as(n+1) + bs(n) = u(n).$$

u(n) est une suite donnée.

Comme pour la résolution des équations différentielles par la Transformation de Laplace : on transformera l'équation à l'aide de la Transformée en Z, on isolera la Transformée en Z du signal inconnu et on trouvera son original qui sera la solution.

Pour trouver un original on utilise le tableau de la Transformée en Z qui se trouve dans le Formulaire de Mathématiques dont on ne se sépare jamais.

Exercice 1

Exercice 1

Trouver les originaux des fonctions suivantes

$Z : z \to 1$

$Z : z \to \dfrac{1}{z^k}$ pour k entier positif. $Z : z \to \dfrac{z}{z-1}$

$Z : z \to \dfrac{z}{z-b}$ b est un réel non nul. $Z : z \to \dfrac{bz}{(z-b)^2}$

$Z : z \to \dfrac{1}{z^k} \times \dfrac{z}{z-1} = \dfrac{1}{z^{k-1}(z-1)}$ k est un entier supérieur à 1. $Z : z \to \dfrac{1}{z-1}$

Réponses

Original	Fonction
Suite de Dirac. $d : n \to d(n)$. $d(n) = 0$ si $n \neq 0$ $d(0) = 1$	$Z : z \to 1$
Suite de Dirac retarde de k. $d : n \to d(n)$ $d(n) = 0$ si $n \neq k$ $d(k) = 1$	$Z : z \to \dfrac{1}{z^k}$ pour k entier positif.
Echelon unité discret causale. $e : n \to e(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$	$Z : z \to \dfrac{z}{z-1}$
$x : n \to b^n \times e(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ b^n & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$	$Z : z \to \dfrac{z}{z-b}$ b est un réel non nul.
$x : n \to b^n \times r(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ b^n \times n & \text{si } n > 0 \end{cases}$	$Z : z \to \dfrac{bz}{(z-b)^2}$
Echelon unité retardé de k $e : n \to e(n-k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k \\ 1 & \text{si } n \geq k \end{cases}$	$Z : z \to \dfrac{1}{z^{k-1}(z-1)}$ k est un entier supérieur à 1
Echelon unité retardé de 1. $e : n \to e(n-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 1 \\ 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$	$Z : z \to \dfrac{1}{z-1}$

Recherche d'originaux par décomposition en éléments simples, cas concrets.

Un élément simple est une fonction

$S : z \to S(z)$ **dont on connaît « simplement l'original ».**

Cas no1

Original	Elément simple
$x : n \to x(n) = a^{n-k} e(n-k)$	$\frac{1}{z^k} \times \frac{z}{z-a}$

(Théorème du retard)

Si on veut connaître l'original d'une fonction qui n'est pas simple on peut parfois la décomposer en une somme d'éléments simples est effectuer la somme de leurs originaux.

Exemple 1

Trouvons l'original de la fonction :

$$X : z \to X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

Cette fonction n'est pas simple, par contre, $z \to \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \times \frac{z}{z-a}$ **est un élément simple dont l'original est :**

$$x : n \to a^{n-1} e(n-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 1 \\ a^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}.$$

Décomposons la fonction X en éléments simples : trouvons les réels A et B tels que :

$$X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

Une réduction au même dénominateur donne l'identification suivante :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + 2B = -1 \end{cases}$$

$$A = -1; B = 1$$

Donc :

$$X(z) = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}$$

L'original de la fonction X est donc :

$$x : n \to -2^{n-1}e(n-1) + 3^{n-1}e(n-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 1 \\ -2^{n-1} + 3^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Situation no 1

On veut trouver le signal inconnu s causal discret qui vérifie :

$$s(n+2) + as(n+1) + bs(n) = u(n)$$

Les valeurs de s (0) et s (1) sont fixées à l'avance (les conditions initiales).

Méthode et résolution

1) **Transformer l'égalité à l'aide de la Transformée en Z.**

2) **Isoler X (z).**

3) **Décomposer en éléments simples.**

4) **Retrouver l'original.**

5) **Conclure**

Souvenons-nous

X est la Transformée en Z du signal $s : n \to x(n)e(n)$

S_k est la Transformée en Z du signal : $n \to x(n+k)e(n+k)$

$$S_k(z) = z^k \times X(z) - z^k \times x(0) - z^{k-1} \times x(1) - \ldots - z^{k-1} \times x(k-2) - z \times x(k-1)$$

Exemple 1 : trouver le signal causal discret

$$s : n \to s(n) = x(n) \times e(n)$$

$$\text{tel que} \quad s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n) = d(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

avec : $s(0) = 0, s(1) = 0$. C'est à dire :

$$x(n+2) \times e(n+2) - 5x(n+1) \times e(n+1)) + 6x(n) \times e(n) = d(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

avec $x(0) = 0, \ x(1) = 0$

Le signal d est connu (la suite de Dirac).

Le signal $s : n \to s(n) = x(n) \times e(n)$ est inconnu, à exprimer. On va appliquer le programme

1) Transformer l'égalité à l'aide de la Transformée en Z.

2) Isoler X (z).

3) Décomposer en éléments simples.

4) Retrouver l'original.

5) Conclure

Transformation de l'égalité à l'aide de la transformée en Z

$$x(n+2)\times e(n+2) - 5x(n+1)\times e(n+1)) + 6x(n)\times e(n) = d(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

avec $x(0) = 0,\ x(1) = 0$

1) **Transformons l'égalité à l'aide de la Transformée en Z.**

X représente la transformée en Z du signal inconnu

$$s : n \rightarrow s(n) = x(n)\times e(n).$$

X est la Transformée en Z du signal $s : n \rightarrow x(n)e(n)$

La Transformée en Z du signal : $n \rightarrow x(n+k)e(n+k)$

est :

$$z \rightarrow z^k \times X(z) - z^k \times x(0) - z^{k-1} \times x(1) - \dots - z^{k-1} \times x(k-2) - z \times x(k-1)$$

On applique cette formule pour $k = 1$ et $k = 2$ avec $x(0) = 0$ et $x(1) = 0$

La Transformée en Z du signal

$n \rightarrow x(n+2)\times e(n+2) - 5x(n+1)\times e(n+1)) + 6x(n)\times e(n))$

est :

$$z \rightarrow \left[z^2 \times X(z) - z^2 \times x(0) - z \times x(1)\right] - 5\left[z \times X(z) - z \times x(0)\right] + 6X(z).$$

Compte tenu des conditions initiales x (0)=0, x (1)=0, on obtient :

$$z \rightarrow z^2 \times X(z) - 5z \times X(z) + 6X(z).$$

La condition :

$x(n+2)\times e(n+2)-5x(n+1)\times e(n+1))+6x(n)\times e(n))=d(n)$ **donne**

$$\boxed{z^2\times X(z)-5z\times X(z)+6X(z)=1}$$

la Transformée en Z de la suite de Dirac étant la fonction constante 1.

L'équation a été transformée

L'égalité a été transformée à l'aide de la Transformée en Z.

2) X (z) est isolé

Voici l'équation de départ:

$$x(n+2)\times e(n+2)-5x(n+1)\times e(n+1))+6x(n)\times e(n)=d(n)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad n\neq 0\\ 1 & \text{si} \quad n=0.\end{cases}$$

avec $x(0)=0,\ x(1)=0$

Cette équation a été transformée en:

$$z^2\times X(z)-5z\times X(z)+6X(z)=1$$

où $X: z\to X(z)$ **représente la transformée en Z du signal inconnu** $n\to x(n)\times e(n)$.

Factorisons:

$$\left(z^2-5z+6\right)\times X(z)=1$$

Isolons X (z)

$$X(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}.$$

Le polynôme z^2-5z+6 **admet** 2 **et** 3 **pour racines**

Donc il peut être factorisé:

$$z^2-5z+6=(z-2)(z-3)$$

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}}$$

X (z) a été isolé.

Remarque

Face à un polynôme je me demande souvent s'il possède une racine évidente.

Pour trouver les racines, j'ai d'abord cherché une racine évidente; j'ai trouvé 2 après avoir essayé 1, puis j'ai factorisé à vue le polynôme : $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(?+?)$.

La décomposition en éléments simples.

Nous recherchons le signal $n \to x(n) \times e(n)$ **tel que:**

$$\boxed{\begin{array}{l} x(n+2) \times e(n+2) - 5x(n+1) \times e(n+1)) + 6x(n) \times e(n) = d(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases} \\ \text{avec } x(0) = 0,\ x(1) = 0 \end{array}}$$

Sa Transformée en Z est désignée par $X : z \to X(z)$ **.**

On a trouvé:

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}}$$

Décomposons en éléments simples:

trouvons les réels a et b tels que $X(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)} = \dfrac{a}{z-2} + \dfrac{b}{z-3}$.

La réduction au même dénominateur donne:

$$X(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{(a+b)z-3a-2b}{(z-2)(z-3)}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -3a-2b=1 \end{cases}$$

d'où : $a=-1, b=1$

On obtient la décomposition en éléments simples:

$$\boxed{X(z)=-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3}}$$

X (z) a été décomposé en éléments simples.

$-\frac{1}{z-2}, \frac{1}{z-3}$ sont des éléments simples car on connaît l'original pour chacun d'entre eux.

Recherche de l'original.

Original de $\frac{1}{z-2}$

On sait que l'original de $\frac{z}{z-2}$ est $2^n e(n)$

	Signal causal $n \to x(n)$ pour $n \in N$	Transformation en Z $z \to (Zx)(z)$
Ligne 5	$f(n)=a^n, a \in R-\{0\}$	$(Zf)(z)=\frac{z}{z-a}$

Signaux causaux, donc:

le signal $n \to x(n)e(n)$ est désigné simplement par $n \to x(n)$.

$n \to 2^n e(n)$ est donc désigné par $f(n)=2^n$.

Et il est rappelé : $n \in N$.

$\frac{1}{z-2}$ s'écrit : $\frac{1}{z} \times \frac{z}{z-2}$

Formulaire de Mathématiques qui ne me quitte jamais:

	Signal causal $n \to x(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$	Transformation en Z $z \to (Zx)(z)$
Ligne 7	$y(n) = x(n - n_0)$,$(n - n_0) \in \mathbb{N}$ ou $y(n) = x(n - n_0)e(n - n_0)$ *Ils sont bien obligés de l'écrire comme moi*	$(Zy)(z) = z^{-n_0}(Zx)(z)$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \times \frac{z}{z-2} = z^{-1} \times \frac{z}{z-2} = z^{-1} Z(f)(z) \text{ avec } f(n) = 2^n$$

$$\boxed{\text{L'original de } \frac{1}{z-2} \text{ est } n \to 2^{n-1} e(n-1).}$$

De même:

$$\boxed{\text{l'original de } \frac{1}{z-3} \text{ est } n \to 3^{n-1} e(n-1).}$$

Conclusion

La Transformée en Z du signal inconnu est

$$\boxed{X : z \to X(z) = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}}$$

L'original de $\frac{1}{z-2}$ est $n \to 2^{n-1} e(n-1)$. L'original de $\frac{1}{z-3}$ est $n \to 3^{n-1} e(n-1)$.

Le signal discret

$$\boxed{\text{L'original de } X(z) = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3} \text{ est } n \to -2^{n-1} e(n-1) + 3^{n-1} e(n-1)}$$

Le signal $n \to x(n)\times e(n)$ qui vérifie

$$x(n+2)\times e(n+2) - 5x(n+1)\times e(n+1)) + 6x(n)\times e(n) = d(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

avec $x(0) = 0,\ x(1) = 0$ est $n \to -2^{n-1}e(n-1) + 3^{n-1}e(n-1)$

$$s : n \to s(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 1 \\ -2^{n-1} + 3^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

vérifie :

$$s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Vérification (non demandée en général)

On a bien

si $n \geq 1$:

$s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n) =$

$-2^{n+1} + 3^{n+1} - 5\left(-2^{n} + 3^{n}\right) + 6\left(-2^{n-1} + 3^{n-1}\right) =$

$2^{n-1}\left(-4 + 10 - 6\right) + 3^{n-1}\left(9 - 15 + 6\right) = 0$

si $n = 0$:

$s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n) =$

$-2^{n+1} + 3^{n+1} - 5\left(-2^{n} + 3^{n}\right) = -2 + 3 = 1$

si $n < 0$: $s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n) = 0.$

Exemple 2

Exemple 2 : trouver le signal causal discret

$s : n \to s(n) = x(n)\times e(n)$

tel que :

$$s(n+2)-5s(n+1)+6s(n)=e(n)=\begin{cases}0 & \text{si } n<0\\ 1 & \text{si } n\geq 0.\end{cases} \quad \text{avec : } s(0)=0, s(1)=0.$$

c'est à dire:

$$x(n+2)\times e(n+2)-5x(n+1)\times e(n+1))+6x(n)\times e(n)=e(n)=\begin{cases}0 & \text{si } n<0\\ 1 & \text{si } n\geq 0.\end{cases}$$

avec $x(0)=0 \;\; x(1)=0$

1) Transformons l'égalité à l'aide de la Transformée en Z.

X représente la transformée en Z du signal inconnu

$$s : n \to s(n) = x(n)\times e(n).$$

La transformée en Z du signal

$n \to s(n+2)-5s(n+1)+6s(n)$ est comme dans l'exemple 1 :

$z \to z^2\times X(z)-5z\times X(z)+6X(z).$

La condition :

$s(n+2)-5s(n+1)+6s(n)=e(n)$ donne :

$$\boxed{z^2\times X(z)-5z\times X(z)+6X(z)=\frac{z}{z-1}}$$

la Transformée en Z de la suite de l'échelon unité étant la fonction :

$$\boxed{z\to\frac{z}{z-1}}$$

L'égalité a été transformée à l'aide de la Transformée en Z.

2) Isolons X (z).

$$z^2\times X(z)-5z\times X(z)+6X(z)=\frac{z}{z-1} \quad \left(z^2-5z+6\right)\times X(z)=\frac{z}{z-1}\,X(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}.$$

Le polynôme z^2-5z+6 admet 2 et 3 pour racines donc :

$z^2-5z+6=(z-2)(z-3)$

$$\boxed{X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}}$$

X (z) a été isolée.

Décomposons en éléments simples.

Trouvons les réels A, B et V tels que :

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3}$$

Une réduction au même dénominateur donne:

$$X(z) = \frac{A(z-2)(z-3) + B(z-1)(z-3) + C(z-1)(z-2)}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{(A+B+C)z^2 - (5A+4B+3C)z + 6A+3B+2C}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

Pour identifier il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=-1 \\ 6A+3B+2C=0 \end{cases}$$

Choisissons C pour paramètre dans la première et dernière équation :

$$\begin{cases} A+B=-C \\ 6A+3B=-2C \end{cases}$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -C & 1 \\ -2C & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-C}{-3} = \frac{C}{3}, \quad B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -C \\ 6 & -2C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{4C}{3}$$

En remplaçant dans la deuxième équation :

$$\frac{5C - 16C + 9C}{3} = -1$$

$$C = \frac{3}{2}, B = -2, A = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{z-1} - 2 \times \frac{1}{z-2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{z-3}}$$

X (z) a été décomposée en éléments simples.

Retrouvons l'original.

$$\boxed{n \to \frac{1}{2} e(n-1) - 2 \times 2^{n-1} e(n-1) + \frac{3}{2} \times 3^{n-1} e(n-1)}$$

On peut maintenant conclure.

5) Conclusion.

Le signal discret

$$s : n \to s(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 1 \\ \frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

vérifie :

$$s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

Vérification (non demandée en général)

On a bien

si $n \geq 1$:

$$s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n)$$

$$= \frac{1}{2} - 2^{n+2} + \frac{3^{n+2}}{2} - 5\left(\frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2} - 2^{n} + \frac{3^{n}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + 2^{n}(-4 + 10 - 6) + 3^{n}\left(\frac{9}{2} - \frac{15}{2} + \frac{6}{2}\right) = 1$$

si $n = 0 : s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n) = s(2) - 5s(1) = \frac{1}{2} - 4 + \frac{9}{2} - 6\left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2}\right) = 1$

si $n = -1 : s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n) = s(1) = \frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2} = 0$

si $n < -1 : s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n) = 0.$

Exercices d'application

1) trouver le signal causal discret

$$s : n \to s(n) = x(n) \times e(n)$$

tel que $s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n) = d(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$

avec : $s(0) = 0, s(1) = 1$. C'est à dire :

$$x(n+2) \times e(n+2) - 5x(n+1) \times e(n+1)) + 6x(n) \times e(n) = d(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

avec $x(0) = 0,\ x(1) = 1$

2) trouver le signal causal discret

$$s : n \to s(n) = x(n) \times e(n)$$

tel que :

$s(n+2) - 5s(n+1) + 6s(n) = e(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < 0 \\ 1 & \text{si} \quad n \geq 0. \end{cases}$ avec : $s(0) = 0, s(1) = 1$.

c'est à dire:

$$x(n+2) \times e(n+2) - 5x(n+1) \times e(n+1)) + 6x(n) \times e(n) = e(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < 0 \\ 1 & \text{si} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

avec $x(0) = 0,\ x(1) = 1$